Индуцированные структуры на трансверсалях к подгруппе группы и гипергруппы над группой

Самвел Г. Далалян
Ереванский государственный университет

Аннотация. На трансверсалях к подгруппе группы с помощью бинарной операции группы определяются структурные отображения и на их основе вводится понятие гипергруппы над группой, обобщающее понятие фактор-группы заданной группы по нормальной подгруппе. Категория гипергрупп над группой содержит в качестве подкатегорий категорию групп, категорию линейных пространств, категорию полей (тел).
Ключевые слова: трансверсаль, фактор-группа, гипергруппа над группой, линейное пространство, поле.

УДК 512548 +512538

0. Одной из фундаментальных конструкций теории групп является конструкция фактор-группы данной группы по ее нормальной подгруппе. По любой данной группе G и произвольной ее нормальной подгруппе H строится фактор-множество G/H, затем оно снабжается индуцированной структурой группы. Фактор-множество G/H интерпретируется как разбиение множества G на множество смежных классов группы G по нормальной подгруппе H, произвольным образом фиксируется по одному элементу в каждом смежном классе и определяется бинарная операция на множестве G/H с помощью бинарной операции группы G.

При этом существенную роль играют следующие два обстоятельства. Во-первых, по произвольной, в том числе нормальной, подгруппе H группы G и любому элементу $a \in G$ можно построить два смежных класса: правый $Ha = \{x \cdot a, x \in H\}$ и левый $aH = \{a \cdot x, x \in H\}$; в случае нормальной подгруппы H эти два смежных класса совпадают. Во-вторых, произведение смежных классов по вышеуказанному принципу в случае нормальной подгруппы H определяется корректно, то есть не зависит от выбора отмеченных элементов.

Если отказаться от условия нормальности подгруппы H, эти два свойства уже не выполняются. Оказывается, тем не менее, на подходяще выбранных множествах M можно задать бинарную операцию, индуцированную бинарной операцией группы G, однако, в общем случае, эта операция не будет групповой. Данная заметка посвящена конструкции этой бинарной операции и трех сопутствующих структурных отображений, на основе которых вводится понятие гипергруппы над группой. Доказывается, что категория гипергрупп над группой содержит в качестве подкатегорий категорию групп, категорию линейных пространств, категорию полей (тел).

1. Подходящий для наших целей выбор множества M основан на понятии дополнительного множества к подгруппе группы. Пусть G - группа, H - ее произвольная подгруппа. Подмножество M группы G называется *правым дополнительным множеством к подгруппе* H, если для любого элемента $x \in G$ существуют единственные элементы $\alpha \in H$ и $a \in M$, такие что $x = \alpha \cdot a$. Аналогично (двойственно) определяется понятие левого дополнительного множества к подгруппе H. Вообще, основные понятия и конструкции настоящей заметки имеют два варианта: правый и левый. В данной заметке мы, как правило, рассматриваем только соответствующие правые варианты и слово правый часто опускаем.

Правой *трансверсалью к подгруппе H группы G* называется подмножество M группы G, пересекающее каждый правый смежный класс относительно подгруппы H в точности по одному элементу.

Сечением канонического (правого) сюръективного фактор-отображения

$$\psi : G \to H\backslash G,\ a \mapsto Ha$$

называется отображение $\sigma : H\backslash G \to G$, удовлетворяющее условию $\sigma \circ \psi = id$, где id означает тождественное отображение.

Следующие три утверждения эквивалентны:

M - правое дополнительное множество к подгруппе H группы G;

M - правая трансверсаль к подгруппе H группы G;

M - образ сечения σ правого фактор-отображения ψ (см. [1]).

Поэтому термины правое дополнительное множество, правая трансверсаль и образа сечения правого фактор-отображения взаимозаменяемы.

2. Пусть G - произвольная группа, H - ее подгруппа, M - дополнительное множество к подгруппе H. Мы обозначаем элементы группы H строчными греческими буквами, элементы множества M - строчными латинскими буквами.

Определим отображения

(B1) $\Phi : M \times H \to M, \quad \Phi(a, \alpha) := a^\alpha$,

(B2) $\Psi : M \times H \to H, \quad \Psi(a, \alpha) := {}^a\alpha$,

(B3) $\Xi : M \times M \to M, \quad \Xi(a, b) := [a, b]$,

(B4) $\Lambda : M \times M \to H, \quad \Lambda(a, b) := (a, b)$

соотношениями

$$(F1) \qquad a \cdot \alpha = {}^a\alpha \cdot a^\alpha, \quad a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b].$$

3. Теорема. *Отображения* Φ, Ψ, Ξ, Λ *обладают следующими свойствами.*

(P1) *Отображение* Ξ *определяет на* M *структуру правой квазигруппы с левым нейтральным элементом* o.

(P2) *Отображение* Φ *является правым действием группы* H *на множество* M.

(P3) *Отображение* Ψ *переводит подмножество* $\{o\} \times H$ *на* H.

(P4) *Система отображений* $\Omega = (\Phi, \Psi, \Xi, \Lambda)$ *подчиняется следующим соотношениям*:

$$\begin{array}{ll}
(A1) & {}^a(\alpha \cdot \beta) = {}^a\alpha \cdot {}^{a^\alpha}\beta, \\
(A2) & [a, b]^\alpha = [a^{{}^b\alpha}, b^\alpha], \\
(A3) & (a, b) \cdot {}^{[a,b]}\alpha = {}^a({}^b\alpha) \cdot (a^{{}^b\alpha}, b^\alpha), \\
(A4) & [[a, b], c] = [a^{(b,c)}, [b, c]], \\
(A5) & (a, b) \cdot ([a, b], c) = {}^a(b, c) \cdot (a^{(b,c)}, [b, c]),
\end{array}$$

Доказательство. Используем ассоциативность бинарной операции группы G в виде

$$(a \cdot \alpha) \cdot \beta = a \cdot (\alpha \cdot \beta), \quad a \in M,\ \alpha, \beta \in H.$$

Применяя $(F1)$ к левой части, получаем

$$(a\cdot\alpha)\cdot\beta = ({}^a\alpha\cdot a^\alpha)\cdot\beta = {}^a\alpha\cdot(a^\alpha\cdot\beta) = {}^a\alpha\cdot({}^{a^\alpha}\beta\cdot(a^\alpha)^\beta) = ({}^a\alpha\cdot{}^{a^\alpha}\beta)\cdot(a^\alpha)^\beta.$$

Применив $(F1)$ к правой части, получим

$$a\cdot(\alpha\cdot\beta) = {}^a(\alpha\cdot\beta)\cdot a^{\alpha\cdot\beta}.$$

Следовательно,

$$({}^a\alpha\cdot{}^{a^\alpha}\beta)\cdot(a^\alpha)^\beta = {}^a(\alpha\cdot\beta)\cdot a^{\alpha\cdot\beta},\quad {}^a\alpha\cdot{}^{a^\alpha}\beta,\ {}^a(\alpha\cdot\beta)\in H,\quad (a^\alpha)^\beta,\ a^{\alpha\cdot\beta}\in M.$$

Отсюда, используя единственность разложения в произведение элементов подгруппы H и трансверсали M, получаем соотношения $(A1)$ и

$$(A0)\qquad\qquad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\cdot\beta}.$$

Соотношение (A0) является первым необходимым соотношением определения действия группы на множество (свойство (P2)).

Аналогично, используя ассоциативность бинарной операции группы G в частных случаях

$$(a\cdot b)\cdot\alpha = a\cdot(b\cdot\alpha),\quad a,b\in M,\ \alpha\in H$$

и

$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c),\quad a,b,c\in M,$$

получим соотношения $(A2),(A3)$ и $(A4),(A5)$, соответственно.

Применяя те же идеи доказательства к равенству

$$a\cdot\varepsilon = \varepsilon\cdot a,\quad a\in M,\ \varepsilon \text{ - нейтральный элемент подгруппы } H,$$

можно показать, что $a^\varepsilon = a,\ {}^a\varepsilon = \varepsilon$. Первое из этих соотношений комплектует свойство (P2).

Осталось доказать свойства (P1) и (P3). Пусть

$$e = \theta\cdot o,\quad \theta\in H, o\in M$$

каноническое разложение нейтрального элемента $e=\varepsilon$ группы G в произведение элементов подгруппы H и трансверсали M. Тогда для любого элемента $a\in M$ имеем

$$\varepsilon\cdot a = \theta\cdot o\cdot a = (\theta\cdot(o,\,a))\cdot[o,\,a].$$

Следовательно, в частности, $[o,a]=a$. Значит бинарная операция Ξ имеет левый нейтральный элемент o.

Так как

$$(\alpha\cdot\theta)\cdot o = \alpha = \theta\cdot(o\cdot\alpha) = (\theta\cdot{}^o\alpha)\cdot o^\alpha,$$

получаем соотношения ${}^o\alpha = \theta^{-1}\cdot\alpha\cdot\theta$ и $o^\alpha = o$. Свойство (P3) является следствием первого из этих соотношений.

Наконец, докажем, что множество M вместе с бинарной операцией Ξ является правой квазигруппой, то есть любое уравнение $[x,a]=b,\ a,b\in M$ имеет единственное решение в M.

Для любого элемента $a\in M$ элементы $a^{(-1)}\in H$ и $a^{[-1]}\in M$ определим условием

$$a^{-1} = a^{(-1)}\cdot a^{[-1]}.$$

Тогда

$$a^{(-1)}\cdot(a^{[-1]},\,a)\cdot[a^{[-1]},\,a] = a^{(-1)}\cdot a^{[-1]}\cdot a = a^{-1}\cdot a = e = \theta\cdot o,$$

и, следовательно,

$$(F2) \qquad [a^{[-1]},\, a] = o, \quad a^{(-1)} \cdot (a^{[-1]},\, a) = \theta.$$

Лемма. *Для элементов $x, a, b \in M$ соотношение $[x, a] = b$ выполняется тогда и только тогда, когда*

$$x = [b^{a^{(-1)}}, a^{[-1]}], \quad (x, a) \cdot {}^{b}(a^{(-1)}) \cdot (b^{a^{(-1)}}, a^{[-1]}) = \varepsilon.$$

Доказательство леммы. На основании (F1) и единственности разложения в произведение элементов подгруппы H и трансверсали к ней M имеем цепочку эквивалентных равенств:

$$[x, a] = b \quad \Leftrightarrow \quad (x, a) \cdot [x, a] = (x, a) \cdot b \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot a = (x, a) \cdot b \quad \Leftrightarrow$$
$$x = (x, a) \cdot b \cdot a^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = (x, a) \cdot b \cdot a^{(-1)} \cdot a^{[-1]} \quad \Leftrightarrow$$
$$x = (x, a) \cdot {}^{b}(a^{(-1)}) \cdot b^{a^{(-1)}} \cdot a^{[-1]} \quad \Leftrightarrow$$
$$\varepsilon \cdot x = (x, a) \cdot {}^{b}(a^{(-1)}) \cdot (b^{a^{(-1)}}, a^{[-1]}) \cdot [b^{a^{(-1)}}, a^{[-1]}] \quad \Leftrightarrow$$
$$x = [b^{a^{(-1)}}, a^{[-1]}], \quad (x, a) \cdot {}^{b}(a^{(-1)}) \cdot (b^{a^{(-1)}}, a^{[-1]}) = \varepsilon.$$

Следствие. *Уравнение $[x, a] = b$, $a, b \in M$ может иметь не более одного решения в M. Таким решением может быть только $x = [b^{a^{(-1)}}, a^{[-1]}]$. Это значение неизвестного будет решением рассматриваемого уравнения тогда и только тогда, когда имеет место равенство*

$$(F3) \qquad ([b^{a^{(-1)}}, a^{[-1]}], a) \cdot {}^{b}(a^{(-1)}) \cdot (b^{a^{(-1)}}, a^{[-1]}) = \varepsilon.$$

Подставляя значение $x = [b^{a^{(-1)}}, a^{[-1]}]$ в уравнение $[x, a] = b$, убеждаемся, что оно является его решением:

$$[[b^{a^{(-1)}}, a^{[-1]}], a] = [[b^{a^{(-1)} \cdot (a^{[-1]}, a)}, [a^{[-1]}, a]] = [b^{\theta}, o] = (b^{\theta})^{\theta^{-1}} = b.$$

Здесь используются $(A4), (F2)$ и соотношение $[a, o] = a^{\theta^{-1}}$, которое (вместе с соотношением $(a, o) = {}^{a}(\theta^{-1})$) можно извлечь из равенств

$$(a, o) \cdot [a, o] = a \cdot o = a \cdot \theta^{-1} = {}^{a}(\theta^{-1}) \cdot a^{\theta^{-1}}.$$

Таким образом, теорема полностью доказана. Заметим, что, как следствие, справедливо соотношение $(F3)$.

4. Определение (см. [2], [4]). Пара (M, H), состоящая из множества M и группы H, вместе с системой структурных отображений $\Omega = (\Phi, \Psi, \Xi, \Lambda)$ называется *правой гипергруппой над группой* H (и обозначается M_H), если выполняются свойства (P1) - (P4).

Теперь нашу основную теорему 3 можно переформулировать так.

С каждой тройкой (G, H, M), где G - группа, H - ее подгруппа, M - правая трансверсаль к подгруппе H, канонически ассоциируется правая гипергруппа над группой M_H.

Конструкция, с помощью которой мы получили гипергруппу над группой M_H, исходя из тройки $(G, H.M)$, называется *стандартной конструкцией* гипергруппы над группой. Можно доказать (см, [6]), что стандартная конструкция *универсальна*: с точностью до изоморфизма, любая гипергруппа над группой получается с помощью стандартной конструкции (понятие изоморфизма гипергрупп над группой определяется в п. 7 настоящей заметки).

Термин гипергруппа уже используется в математике. Так называются объекты со структурой, похожей на групповую, но с многозначной бинарной операцией (см., например, [7]; о некоторых применениях гипергрупп см. в [8]). Выбор термина для введенного нами объекта обосновывается тем, что этот объект является обобщением группы и линейного пространства над полем (телом) (см. п. 9 и 10 этой заметки). Путаницы с

понятием гипергруппы не может возникнуть, потому что (полное) название введенного объекта - *гипергруппа над группой.*

5. Сделаем несколько комментариев к соотношениям $(A1)-(A5)$ определения гипергруппы над группой.

(a1) Условие $(A1)$ означает, что для любого элемента $a \in M$ отображение

$$\Psi_a : H \to H, \quad \Psi_a(\alpha) = {}^a\alpha$$

является „обобщенным гомоморфизмом". Оно превращается в обычный гомоморфизм, если $\Phi_\alpha(a) = a^\alpha = a$ при любом $\alpha \in H$, то есть когда a - неподвижный элемент относительно действия Φ группы H на множество M.

(a2) Аналогично условие $(A2)$ означает, что для любого элемента $\alpha \in H$ отображение

$$\Phi_\alpha : M \to M, \quad \Phi_\alpha(a) = a^\alpha$$

является „обобщенным гомоморфизмом" для бинарной операции $\Xi(a,b) = [a,b]$ квазигруппы (M,Ξ). Оно превращается в обычный гомоморфизм, если ${}^b\alpha = \alpha$ для любого $b \in M$.

(a3) Формула $(A3)$ является аналогом формулы $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\cdot\beta}$. Кроме того имеем аналог

$$(F4) \qquad {}^o\alpha = \theta^{-1}\cdot\alpha\cdot\theta$$

формулы $a^\varepsilon = a$. Значит отображение Ψ можно рассматривать как некое обобщенное кодействие правой квазигруппы (M,Ξ) с левым нейтральным элементом o на группу H обобщенными автоморфизмами.

Отметим, что при доказательстве теоремы 3 мы использовали соотношение $(F4)$ для получения свойства $(P3)$. На самом деле, здесь справедлива и обратная импликация, так что соотношение $(F4)$ и свойство $(P3)$ эквивалентны. Условие $(P3)$ в определении гипергруппы над группой просто более удобная форма задания соотношения $(F4)$.

(a4) Соотношение $(A4)$, очевидно, формула обобщенной ассоциативности бинарной операции Ξ.

(a5) Вскользь отметим, что соотношение $(A5)$ можно рассматривать как обобщение коцепного правила теории когомологий групп (см. [9], [1], [6]).

6. Предложение. *Пусть H - нормальная подгруппа группы G, M - произвольная трансверсаль к подгруппе H, $\Omega = (\Phi,\Psi,\Xi,\Lambda)$ - система структурных отображений гипергруппы над группой M_H. Тогда*

1) действие Φ группы H на множество M - тривиальное, то есть $a^\alpha = a$ для любых $a \in M, \alpha \in H$;

2) правая квазигруппа (M,Ξ) является группой, изоморфной фактор-группе $H\backslash G$.

Доказательство. 1). По определению нормальной подгруппы для любых элементов $\alpha \in H, a \in M$ элемент $a\cdot\alpha\cdot a^{-1}$ должен принадлежать H. Значит $a^\alpha = a$.

2). Если действие Φ - тривиальное, то согласно $(A4)$ правая квазигруппа (M,Ξ) с левым нейтральным элементом ассоциативна. Но любая ассоциативная правая квазигруппа с левым нейтральным элементом является группой.

Фактор-отображение $\psi : G \to H\backslash G$, $x \mapsto H\cdot x$ устанавливает биекцию между множествами M и $H\backslash G$ и переводит бинарную операцию Ξ в бинарную операцию фактор-группы $H\backslash G$. Значит группа (M,Ξ) изоморфна фактор-группе $H\backslash G$, причем это верно для любой трансверсали M к подгруппе H. Предложение 5 доказано.

6.1. **Следствие.** *Пусть H - нормальная подгруппа группы G. Пусть M' и M'', соответственно, правая и левая трансверсали к подгруппе H, а Ξ' и Ξ'' - соответствующие бинарные операции. Тогда группы (M',Ξ') и (M'',Ξ'') изоморфны.*

Доказательство. Группа (M',Ξ') изоморфна фактор-группе $H\backslash G$, группа (M'',Ξ'') изоморфна фактор-группе G/H, а фактор-группы $H\backslash G$ и G/H совпадают.

Итак, понятие гипергруппы над группой является обобщением понятия фактор-группы по нормальной подгруппе, обобщением в смысле предложения 6.

6.2. **Следствие.** *Для всякой тройки (G, H, M), где H - подгруппа группы G индекса 2, квазигруппа (M, Ξ) соответствующей этой тройке гипергруппы над группой M_H будет группой.*

Доказательство. Всякая подгруппа индекса 2 - нормальная.

Таким образом, согласно свойству универсальности стандартной конструкции, гипергруппы над группой с некоммутативной (эквивалентно, не групповой) квазигруппой (M, Ξ) могут возникнуть, только если число элементов $|M|$ множества M больше двух. Все гипергруппы над группой M_H с $|M| = 3$, с точностью до изоморфизма, описаны в кандидатской диссертации П. Зольфагари. Некоторые примеры гипергрупп над группой M_H с $|M| = 3$ и некоммутативной квазигруппой (M, Ξ) приведены в [5].

7. Класс гипергрупп над группой можно превратить в категорию, определив понятие морфизма гипергрупп над группой (см. [3], [6]).

Пусть M_H и $M'_{H'}$ две гипергруппы над группой с системами структурных отображений $\Omega = (\Phi, \Psi, \Xi, \Lambda)$ и $\Omega' = (\Phi', \Psi', \Xi', \Lambda')$, соответственно. *Морфизм из M_H в $M'_{H'}$* - это пара $f = (f_0, f_1)$, состоящая из гомоморфизма групп $f_0 : H \to H'$ и отображения множеств $f_1 : M \to M'$, которые подчиняются соотношениям

$$\Phi \cdot f_1 = (f_1 \times f_0) \cdot \Phi', \quad \Psi \cdot f_0 = (f_1 \times f_0) \cdot \Psi', \quad \Xi \cdot f_1 = (f_1 \times f_1) \cdot \Xi', \quad \Lambda \cdot f_0 = (f_1 \times f_1) \cdot \Lambda'.$$

Классы всех гипергрупп над группой и их морфизмов вместе с покомпонентной операцией композиции морфизмов $f \circ g = (f_0 \circ g_0, f_1 \circ g_1)$, где $f = (f_0, f_1), g = (g_0, g_1)$, и системой тождественных морфизмов $1_{M_H} = (1_H, 1_M)$ образуют категорию, которую мы обозначим $\mathcal{H}g$. Поэтому в отношении гипергрупп над группой мы можем использовать всю терминологию и все результаты общей теории категорий.

Обозначим категорию гипергрупп над группой через $\mathcal{H}g$.

8. Предложение. *Категория гипергрупп над группой $\mathcal{H}g$ содержит подкатегорию, изоморфную категории групп $\mathcal{G}$. Это - полная подкатегория с классом объектов, состоящим из всех гипергрупп M_E над тривиальной группой E.*

Доказательство. Определим функтор $S(G) : \mathcal{G} \to \mathcal{H}g$ следующим образом. Каждой группе M сопоставим пару (M, E) с тривиальной (под)группой E и соответствующую гипергруппу M_E. Очевидно, что при этом структурные отображения Φ, Ψ, Λ определяются однозначно (и тривиально), а в качестве Ξ возьмем бинарную операцию группы M. Тогда выполняются условия $(P1) - (P4)$, так что получаем гипергруппу над группой. Гомоморфизму групп $f_1 : M \to M'$ сопоставим морфизм гипергрупп над группой

$$f = (1_E, f_1) : M_E \to M'_E.$$

Этот функтор инъективен, поэтому устанавливает изоморфизм между категорией $\mathcal{G}$ и ее образом $\mathcal{H}g_E$ относительно функтора $S(G)$, являющимся полной подкатегорией категории $\mathcal{H}g$, классом объектов которой служат все гипергруппы над тривиальной группой E. Обратным функтором к функтору $S(G)$ будет стирающий функтор из (под)категории $\mathcal{H}g_E$, забывающий структурные отображения Φ, Ψ, Λ и тривиальную группу E.

9. Предложение. *Пусть k - произвольное поле. Категория гипергрупп над группой $\mathcal{H}g$ содержит подкатегорию, изоморфную категории линейных пространств $\mathcal{L}_k$ над фиксированным полем k.*

Доказательство. Пусть H - мультипликативная группа поля k. Каждому линейному пространству L над полем k сопоставим гипергруппу M_H над группой H с системой структурных отображений $\Omega = (\Phi, \Psi, \Xi, \Lambda)$, где M совпадает с базовым множеством пространства L, $\Phi(a, \alpha) = a\alpha$ - произведение вектора $a \in M = L$ на скаляр $\alpha \in H \subset k$, Ξ - бинарная операция аддитивной группы пространства L, а Ψ и Λ тривиальны:

$$\Psi(a, \alpha) = \alpha, \quad \Lambda(a, b) = \varepsilon,$$

где $\varepsilon = 1$ - единичный элемент поля k. Из аксиом линейного пространства следует выполнение условий $(P1)-(P4)$ (часть из которых превращается в тавтологию).

Линейному отображению $f : L \to L'$ линейных пространств над полем k сопоставим морфизм гипергрупп над группой $(1_H, f)$, где 1_H - тождественный гомоморфизм группы H. Построенная пара сопоставлений

$$L_k \mapsto M_H, \quad f \mapsto (1_H, f)$$

определяет инъективный функтор $S(L)$ из категории $\mathcal{L}_k$ в категорию $\mathcal{H}g$. Его образ $imS(L)$ будет подкатегорией категории $\mathcal{H}g$, изоморфной категории $\mathcal{L}_k$.

Подкатегория $imS(L)$ имеет класс объектов, состоящий из всех гипергрупп над фиксированной группой H, совпадающей с мультипликативной группой поля k, и с системой структурных отображений $\Omega = (\Phi, \Psi, \Xi, \Lambda)$ такой что

(i) структурные отображения Ψ и Λ тривиальны,

(ii) (M, Ξ) является абелевой группой,

(iii) структурное отображение Φ и группа H подчиняются следующим двум условиям.

Во-первых, группа H абелева. Второе условие формулируется сложнее. Сначала заметим, что в силу условия (ii) на множестве $End(M, \Xi)$ эндоморфизмов (абелевой) группы (M, Ξ) можно определить операцию сложения по формуле

$$(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a) := \Xi(\varphi(a).\psi(a)), \quad \varphi, \psi \in End(M, \Xi),\ a \in M,$$

причем множество $End(M, \Xi)$ вместе с этой операцией становится абелевой группой. Нейтральным элементом θ этой группы будет „нулевой эндоморфизм“, переводящий любой элемент $a \in M$ в нейтральный элемент o группы (M, Ξ). В силу соотношения $(A1)$ определения гипергруппы над группой существует каноническое инъективное отображение $t : H \to End(M, \Xi)$. Второе условие заключается в том, что множество

$$(F5) \qquad\qquad k = t(H) \cup \{\theta\}$$

должно быть замкнутым относительно вышеопределенной операции сложения в $End(M, \Xi)$, и эта операция сложения вместе с операцией умножения, определяемой по правилу

$$t(\alpha) \cdot t(\beta) = t(\alpha \cdot \beta)\ (\alpha, \beta \in H), \quad \theta \cdot \varphi = \theta = \varphi \cdot \theta\ (\varphi \in k),$$

должны задавать на k структуру поля.

Обратный к функтору $S(L)$ - это функтор из $imS(L)$ в $\mathcal{L}_k$, который сопоставляет гипергруппе над группой M_H из категории $imS(L)$ с системой структурных отображений $\Omega = (\Phi, \Psi, \Xi, \Lambda)$ линейное пространство L над полем k, где поле k задается как множество $(F5)$ вместе с определенными на этом множестве операциями сложения и умножения, а линейное пространство L над полем k есть множество M вместе с операцией сложения Ξ и операцией умножения на элементы из поля k, совпадающей с действием соответствующих элементов из $End(M, \Xi) \supset k$.

10. Предложение. *Категория гипергрупп над группой $\mathcal{H}g$ содержит подкатегорию, изоморфную категории полей $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Конструкция функтора $S(F) : \mathcal{F} \to \mathcal{H}g$ аналогична конструкции функтора $S(L)$. Каждому полю F сопоставляется гипергруппа над группой M_H с системой структурных отображений $\Omega = (\Phi, \Psi, \Xi, \Lambda)$, где

M совпадает с базовым множеством поля F,

H - мультипликативная группа поля F,

Φ является ограничением операции умножения поля F,

Ξ - операция сложения поля F,

Ψ и Λ - тривиальные структурные отображения.

На подкатегорию $imS(F)$ накладывается дополнительное к накладываемым на подкатегорию $imS(L)$ условие, заключающееся в том, что аддитивная группа поля k должна быть канонически изоморфной абелевой группе (M, Ξ).

11. Замечание. Если отказаться от условия коммутативности операции умножения в поле и, соответственно, от условия абелевости группы H в (iii) (см. доказательство предложения 9), то получим доказательство утверждения, что категория гипергрупп над группой содержит в качестве подкатегорий категорию линейных пространств над телом и категорию тел. Подчеркнем, однако, что согласно известному результату Веддерберна это замечание ничего нового не прибавляет в случае конечных тел.

12. Замечание. Гипергруппы над группой уже успешно применены в [6] дкя обобщения теоремы Шрайера о расширениях группы с помощью коммутативной группы ([1], стр. 185, Теорема 7.34) и для описания полупрямых произведений групп.

Список литературы

[1] Rotman J. J., *An Introduction to the Theory of Groups.* Springer-Verlag, 1999.

[2] Далалян С. Г., *О гипергруппах, преднормальных подгруппах и простейших группах.* Конф., посвященная 90-летию М. М. Джрбашяна, Ереван, 2008, с. 12-14.

[3] Далалян С. Г., *О категории гипергрупп.* Конф., посвященная 90-летию ЕГУ, Ереван, 2009, с. 8-9.

[4] Dalalyan S. H., *Hypergroups over the group and extensions of a group.* Second Int. Conf. Math. in Armenia, 24-31 Aug 2013, Tsaghkadzor, Armenia, Abstracts, p. 111.

[5] Далалян С. Г., Зольфагари П., *Гипергруппы 3 порядка над группой, возникающие из диэдральной группы* D_9. Фундаментальная и прикладная математика, том 18, вып. 6, 2013, с. 95-110.

[6] Dalalyan S. H., *Hypergroups over the group and generalizations of Schreier's theorem on group extensions.* arXiv.submit/ 09409000 [math.Gr] 24 Mar 2014.

[7] Griffiths L. W., *On Hypergroups, Multigroups, and Product Systems*, Amer. J. Math. vol. 60, pp. 345-354, 1938.

[8] Литвинов Г. Л., *Гипергруппы и гипергрупповые алгебры.* Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., 26 (1985), 57-106.

[9] Браун К. С., *Когомологии групп.* М., Наука, 1987.